4

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Primjer 4.1 U pokeru se svakom igraču dijeli pet karata. Ako se karte dobro promiješaju i podijele, onda je vjerojatnost događaja

$$\text{R=\{ } \textit{royal flush}\text{, tj. desetka, dečko, dama, kralj i as u istoj boji \}}$$

jednaka

$$\mathrm{P}(R) = \frac{4}{\binom{52}{5}} \approx 0.000154.$$

Pretpostavimo da smo pri dijeljenju slučajno vidjeli da je zadnja karta koju smo dobili bila $A_\spadesuit$. Što sada možemo reći o vjerojatnosti događaja R?

- Dobili smo već asa pa se vjerojatnost možda povećala.
- Moramo odobiti *royal flush* u ♠ pa se vjerojatnost možda smanjila.

Označimo traženu vjerojatnost sa $\mathrm{P}(R|A_\spadesuit)$. Ako znamo da je posljednja karta $A_\spadesuit$, onda *royal flush* možemo dobiti samo u ♠ pa je

$$\mathrm{P}(R|A_\spadesuit) = \frac{1}{\binom{51}{4}}.$$

Sada je

$$\frac{\mathrm{P}(R|A_\spadesuit)}{\mathrm{P}(R)} = \frac{\frac{4}{\binom{52}{5}}}{\frac{1}{\binom{51}{4}}} = \frac{\frac{4}{\frac{52}{5}\binom{51}{4}}}{\frac{1}{\binom{51}{4}}} = \frac{13}{5},$$

tj. vjerojatnost se više nego udvostručila.

△

Primjer 4.2 Baca se simetrična kocka. Ako znate da je pao paran broj, kolika je vjerojatnost da je pao broj 2?

Znamo da je prostor elementarnih događaja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definiramo $A = \{$ pao je broj 2 $\} = \{2\}$, $B = \{$ pao je paran broj $\} = \{2, 4, 6\}$. Označimo traženu vjerojatnost s $\mathrm{P}(A|B)$. Ako znamo da je pao paran broj, onda mogu pasti samo brojevi 2,4 ili 6 pa je $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{3}$. Primijetimo da je $A \cap B = \{2\}$ pa je

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} = \mathrm{P}(A|B).$$

△

Definicija. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$, gdje je $\mathrm{P}(B) > 0$. **Uvjetna vjerojatnost** događaja A uz uvjet B se definira sa

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Napomena. Ako je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathrm{P}(B) = 0$, onda gornja definicija nema smisla. Međutim, ako gornji izraz zapišemo kao

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B),$$

onda ova jednakost vrijedi i za $B \in \mathcal{F}$, $\mathrm{P}(B) = 0$, jer je $0 \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(B) = 0$. U Primjeru 4.1 imamo

$$\mathrm{P}(R|A_\spadesuit) = \frac{\mathrm{P}(R \cap A_\spadesuit)}{\mathrm{P}(A_\spadesuit)} = \frac{\frac{1}{\binom{52}{5}}}{\frac{1 \cdot \binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}} = \frac{1}{\binom{51}{4}}.$$

Može se dogoditi da su vjerojatnosti $\mathrm{P}(A|B)$ i $\mathrm{P}(A)$ jednake, odakle zaključujemo da vjerojatnost pojavljivanja događaja A ne ovisi o događaju B. Tada je

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

pa je

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Definicija. Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su **nezavisni** ako je

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Familija događaja $\{A_i : i \in I\}$, gdje je I neki indeksni skup, je **nezavisna** ako je

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \prod_{i\in F} \mathrm{P}(A_i),$$

za svaki konačni podskup $F \subseteq I$.
Familija događaja $\{A_i : i \in I\}$ je **u parovima nezavisna** ako je

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(A_j), \quad \text{za sve } i, j \in I,\ i \neq j.$$

Napomena.

(a) U parovima nezavisni događaji ne moraju biti nezavisni.

(b) $\emptyset$ i Ω su nezavisni sa svim događajima:

- $\mathrm{P}(A \cap \emptyset) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\emptyset)\mathrm{P}(A)$,
- $\mathrm{P}(A \cap \Omega) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A) \cdot 1 = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(\Omega)$.

Zadatak 4.3 Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Pokažite da su tada nezavisni i događaji:

(a) A i B^c,

(b) A^c i B^c,

(c) A i $B \cup C$,

(d) $A \setminus B$ i C.

Rješenje:

(a) $\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$,

(b) $\mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \mathrm{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) = \overset{\text{Sylv.}}{=} 1 - (\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)) \overset{\text{nez.}}{=} 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A)) - (1 - \mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A))(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$,

(c) $\mathrm{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathrm{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \overset{\text{Sylv.}}{=} \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A)(\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A)(\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C)) \overset{\text{Sylv.}}{=} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \cup C)$,

(d) $\mathrm{P}((A \setminus B) \cap C) = \mathrm{P}(A \cap B^c \cap C) = \mathrm{P}((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)) = \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C) \overset{\text{(a)}}{=} \mathrm{P}(A \cap B^c)\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \setminus B)\mathrm{P}(C)$.

△

Zadatak 4.4 Nekadašnje školske kolegice Ana i Eva sretnu se u gradu. Ana kroz razgovor sazna da Eva ima dvoje djece i da je jedno od njih sin. Kolika je (po Ani) vjerojatnost da je drugo Evino dijete kći ako

(a) ništa drugo ne zna,

(b) ona još zna da je gore spomenuti sin starije Evino dijete?

Rješenje:
Označimo K=kći i S=sin. Tada je $\Omega = \{(S,S),(S,K),(K,S),(S,S)\}$, gdje npr. (S,K) znači na je starije dijete sin, a mlađe kći. Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{P}(\{(x,y)\}) = \frac{1}{4}$, za sve $(x,y) \in \Omega$.

(a) Stavimo $A := \{$ jedno Evino dijete je kći $\} = \{(K,K),(K,S),(S,K)\}$ i $B_1 := \{$ jedno Evino dijete je sin $\} = \{(S,S),(S,K),(K,S)\}$. Tada je tražena vjerojatnost

$$\mathrm{P}(A|B_1) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_1)}{\mathrm{P}(B_1)} = \frac{\mathrm{P}(\{(S,K),(K,S)\}}{\mathrm{P}(\{(S,S),(K,S),(S,K)\})} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

(b) Označimo $B_2 := \{$ Evino starije dijete je sin $\} = \{(S,S),(S,K)\}$. Tada tražimo

$$\mathrm{P}(A|B_2) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_2)}{\mathrm{P}(B_2)} = \frac{\mathrm{P}(\{(S,K)\})}{\mathrm{P}(\{(S,S),(S,K)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

△

Zadatak 4.5 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ niz događaja takav da je

$$\mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Rješenje: Definirajmo rastući niz događaja $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $n \in \mathbb{N}$. Računamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_n) = \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) &= 1 - \mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c) \overset{\text{nez.}}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k^c) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathrm{P}(A_k)) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ pa je

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{\left\{\substack{\text{nepr. vjer. na rastuće} \\ \text{nizove događaja}}\right\}}{=} \lim_n \mathrm{P}(B_n) = \lim_n (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

Zadatak 4.6 U ruci imate n ključeva od kolih samo jedan otvara vrata. Odredite vjerojatnost da u k-tom pokušaju otključate vrata ako je $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Rješenje: Definiramo događaje

$$B_k := \{ \text{ u } i\text{-tom pokušaju nismo otključali vrata } \}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Neka je

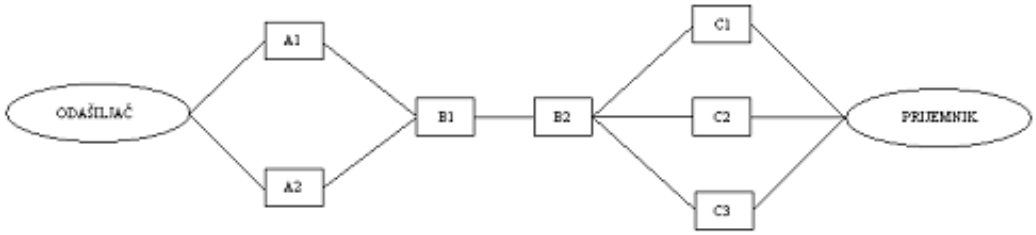
$$A := \{ \text{ vrata su otljučana u } k\text{-tom pokušaju } \}.$$

Tada je $A = B_k^c \cap B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1$ pa je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) =& \mathrm{P}(B_k^c \cap B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1) = \mathrm{P}(B_k^c | B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1)\mathrm{P}(B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1) = \\ =& \mathrm{P}(B_k^c | B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1)\mathrm{P}(B_{k-1} | B_{k-2} \cap \ldots \cap B_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(B_2|B_1)\mathrm{P}(B_1) = \\ =& \frac{1}{n-k+1}\frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-2}{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

△

Zadatak 4.7 Informacijski kanal se sastoji od elemenata koji se kvare nezavisno jedan od drugoga i postavljeni su kao na slici:



Vjerojatnost da se pokvare dijelovi A1 i A2 je p_A, B1 i B2 je p_B, C1, C2 i C3 je p_C. Kanal je prekinut ako nema veze između odsšiljača i prijemnika. Izračunajte vjerojatnost da kanal bude prekinut.

Rješenje: Definiramo sljedeće događaje:
$A_i :=$ { element Ai nije ispravan }, $i = 1, 2$
$B_i :=$ { element Bi nije ispravan }, $i = 1, 2$
$C_i :=$ { element Ci nije ispravan }, $i = 1, 2, 3$
Tada je

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\{\text{kanal je prekinut}\}) = 1 - \mathrm{P}(\{\text{kanal nije prekinut}\}) = \\
&= 1 - \mathrm{P}((A_1^c \cup A_2^c) \cap B_1^c \cap B_2^c \cap (C_1^c \cup C_2^c \cup C_3^c)) = \\
&\overset{\text{nez.}}{=} 1 - \mathrm{P}(A_1^c \cup A_2^c)\mathrm{P}(B_1^c \cap B_2^c)\mathrm{P}(C_1^c \cup C_2^c \cup C_3^c) = \\
&= 1 - (1 - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2))(1 - \mathrm{P}(B_1))(1 - \mathrm{P}(B_2))(1 - \mathrm{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3)) = \\
&\overset{\text{nez.}}{=} 1 - (1 - p_A^2)(1 - p_B)^2(1 - p_C^3).
\end{aligned}$$

△

Zadatak 4.8 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Pokažite da je

$$1 - e^{-(\mathrm{P}(A_1)+\ldots+\mathrm{P}(A_n))} \leq \mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n).$$

Rješenje: Zbog konačne aditivnosti slijedi:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n).$$

S druge strane, koristeći nejednakost $1 - x \leq e^{-x}$, za $x \geq 0$, zaključujemo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= 1 - \mathrm{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c) = \\ &\overset{\text{nez.}}{=} 1 - \mathrm{P}(A_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n^c) = \\ &= 1 - (1 - \mathrm{P}(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - \mathrm{P}(A_n)) \geq \\ &\geq 1 - e^{-\mathrm{P}(A_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-\mathrm{P}(A_n)} = \\ &= 1 - e^{-(\mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n))}. \end{aligned}$$

△

Zadatak 4.9 n strijelaca nezavisno jedan od drugoga gađaju istu metu jednom, pri čemu je vjerojatnost pogotka za svakog strijelca jednaka $p \in \langle 0, 1\rangle$. Za $q \in \langle 0, 1\rangle$ odredite n takav da je vjerojatnost da meta bude barem jednom pogođena bude barem q.

Rješenje: Definirajmo događaje
$A_k := \{k\text{-ti strijelac je pogodio metu }\}$, $k = 1, \ldots, n$.
Tada je $\mathrm{P}(A_k) = p$, $k = 1, \ldots, n$. Traženi događaj je
$A = \{$ meta je pogođena (barem jednom) $\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pa je

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k^c) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathrm{P}(A_k)) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - p) = 1 - (1 - p)^n. \end{aligned}$$

Tražimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je
$\mathrm{P}(A) \geq q \implies 1 - (1 - p)^n \geq q \implies (1 - p)^n \leq 1 - q \implies$
$\implies n \ln(1 - p) \leq \ln(1 - q) \implies n \geq \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)}$.

Definicija. Niz događaja $\{H_i \colon i \in I\}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{N}$, zovemo **potpun sistem događaja** ako je

$$\bigcup_{i\in I} H_i = \Omega \quad \text{i} \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \text{ za sve } i, j, \in \mathbb{N},\ i \neq j.$$

Napomena. Za $A \in \mathcal{F}$ je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) =& \mathrm{P}(A \cap \Omega) = \mathrm{P}(A \cap (\bigcup_{i\in I} H_i)) = \\ =& \mathrm{P}(\bigcup_{i\in I}(A \cap H_i)) \overset{(\sigma)\text{-ad.}}{=} \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A \cap H_i) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i).\end{aligned}$$

Tada formulu

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)$$

zovemo **formula potpune vjerojatnosti**.

Zadatak 4.10 U nekoj trgovini se prodaju 3 vrste žarulja: $\check{\mathrm{Z}}_1$, $\check{\mathrm{Z}}_2$, $\check{\mathrm{Z}}_3$. Vjerojatnosti da se slučajno odaberu žarulje $\check{\mathrm{Z}}_1$, $\check{\mathrm{Z}}_2$, $\check{\mathrm{Z}}_3$ su 0.25, 0.5, 0.25, dok su vjerojatnosti da će one doživjeti 1 200 h redom jednake 0.1, 0.2, 0.4. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odarana žarulja u trgovini doživi 1 200 h?

Rješenje: Definirajmo potpun sistem događaja

$$H_i := \{ \text{ odabrana je žarulja } \check{\mathrm{Z}}_i \},\ i = 1, 2, 3.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_1) = 0.25,\ \mathrm{P}(H_2) = 0.5,\ \mathrm{P}(H_3) = 0.25.$$

Ako stavimo

$$A := \{ \text{ slučajno odabrana žarulja je doživjela 1 200 h } \},$$

onda je

$$\mathrm{P}(A|H_1) = 0.1,\ \mathrm{P}(A|H_2) = 0.2,\ \mathrm{P}(A|H_3) = 0.4.$$

Koristeći formulu potpune vjerojatnosti dobijemo

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) =& \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\mathrm{P}(H_2) + \mathrm{P}(A|H_3)\mathrm{P}(H_3) \\ =& 0.1 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.25 = 0.225.\end{aligned}$$

△

Zadatak 4.11 U kutiji se nalazi n kuglica od kojih je m bijelih ($m \leq n$). Izučemo prvo jednu kuglicu bez vraćanja, a zatim drugu. Izračunajte vjerojatnost da je druga izvučena kuglica bijela.

Rješenje: Definirajmo potpun sistem događaja:

$$H_1 := \{ \text{ prva izvučena kuglica je bijela } \},$$
$$H_2 := \{ \text{ prva izvučena kuglica nije bijela } \}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{m}{n}, \quad \mathrm{P}(H_2) = \frac{n-m}{n}.$$

Traženi događaj je

$$A := \{ \text{ druga izvučena kuglica je bijela } \}$$

i tada je

$$\mathrm{P}(A|H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \ \mathrm{P}(A|H_2) = \frac{m}{n-1}.$$

Iz formule potpune vjerojatnosti je

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\mathrm{P}(H_2) \\ &= \frac{m-1}{n-1} \cdot \frac{m}{n} + \frac{m}{n-1} \cdot \frac{n-m}{n} = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

△

Zadatak 4.12 Lutrija je izdala n srećki, od kojih je m dobitnih ($m \leq n$). Ovisi li vjerojatnost dobitka za pojedinog igrača o broju preostalih srećki, tj. je li bitan redoslijed izvlačenja?

Rješenje: Ako igrač izvlači prvi, onda je vjerojatnost dobitka $\frac{m}{n}$. Promotrimo što se događa kada igrač ne izvlači prvi. Za $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ definiramo događaje

$$A_k := \{ \text{ izvukli smo dobitnu srećku nakon } k \text{ prodanih srećki } \}$$

i pripadne potpune sisteme događaja

$$H_{k,j} := \{ \text{ od prvih } k \text{ prodanih srećki, } j \text{ je bilo dobitnih } \}, \ j \in \{0, \ldots, k\}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_{k,j}) = \frac{\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}} \quad \text{i} \quad \mathrm{P}(A_k|H_{k,j}) = \frac{m-j}{n-k}.$$

Koristeći formulu potpune vjerojatnosti vidimo da je

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\text{—}\mathrm{H}_{k,j})\mathrm{P}(H_{k,j}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{m-j}{n-k} \cdot \frac{\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{m-j}{n-k} \cdot \frac{\binom{m}{m-j}\binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{n-k}} = \sum_{j=0}^{k} \frac{m-j}{n-k} \cdot \frac{\frac{m}{m-j}\binom{m-1}{m-1-j}\binom{n-m}{k-j}}{\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{n-1-k}}$$
$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \sum_{j=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m-1}{j}\binom{n-m}{k-j} = \left\{ \begin{smallmatrix} \text{Vandermondeova} \\ \text{konvolucija} \end{smallmatrix} \right\} =$$
$$= \frac{m}{n} \frac{\binom{(m-1)+(n-m)}{k}}{\binom{n-1}{k}} = \frac{m}{n}.$$

Dakle, vjerojatnost je ista za sve igrače.

△

Zadatak 4.13 Kutija sadrži n kuglica od kojih su neke bijele boje. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednako vjerojatne. U kutiju ubacimo bijelu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da nakon toga izvučemo bijelu kuglicu?

Rješenje: Definiramo potpun sistem događaja

$$H_i := \{ \text{ u kutiji je } i \text{ bijelih kuglica } \},\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Sva pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednake pa je

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{n+1},\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Tražimo vjerojatnost događaja

$$A := \{ \text{ nakon ubačene bijele kuglice, izvučena je bijela kuglica } \}$$

i

$$\mathrm{P}(A|H_i) = \frac{i+1}{n+1}.$$

Iz formule potpune vjerojatnosti dobijemo

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i+1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1)(2+2)}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

△

Zadatak 4.14 Bacamo 5 simetričnih nočića. Nakon prvog bacanja bacamo ponovo one novčiće koji pokazuju glavu. Kolika je vjerojatnost da ćemo nakon drugog bacanja pasti ukupno barem 3 pisma?

Rješenje: Definiramo potput sistem događaja

$$H_i := \{ \text{ u prvom bacanju je palo } i \text{ pisama } \},\ i \in \{0, \ldots, 5\}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{\binom{5}{i}}{2^5},\ i \in \{0, \ldots, 5\}.$$

Traženi događaj je

$$A := \{ \text{ palo je ukupno barem 3 pisma } \}$$

i

$$A^c := \{ \text{ palo je ukupno 0, 1 ili 2 pisma } \}.$$

Računamo

$$\mathrm{P}(A^c|H_0) = \frac{\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2}}{2^5} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(A^c|H_1) = \frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{1}}{2^4} = \frac{5}{16},$$
$$\mathrm{P}(A^c|H_2) = \frac{\binom{3}{0}}{2^3} = \frac{1}{8}, \qquad \mathrm{P}(A^c|H_i) = 0,\ i \in \{3, 4, 5\}.$$

Tada nam formula potpune vjerojatnosti daje

$$\mathrm{P}(A^c) = \sum_{i=0}^{5} \mathrm{P}(A^c|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{5}{0}}{2^5} + \frac{5}{16} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{2^5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{53}{512}.$$

i

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = \frac{459}{512} \approx 0.896.$$

△

Zadatak 4.15 U svakoj od n kutija se nalazi a bijelih i b crnih kuglica. Iz prve kutije nasumce izvučemo jednu kuglicu i prebacimo je u drugu kutiju (bez gledanja kuglice) pa onda iz druge kutije nasumce izvučemo jednu kuglicu i prebacimo je u treću kutiju i tako dalje. Izračunajte vjerojatnost da iz n-te kutije izvučemo bijelu kuglicu?

Rješenje: Definiramo događaj

$$A_n := \{ \text{ iz } n\text{-te kutije je izvučena bijela kuglica } \}.$$

- $n = 1$

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{a}{a+b}$$

- $n = 2$

$$H_1 := \{ \text{ prebacili smo bijelu kuglicu } \} \qquad \mathrm{P}(H_1) = \frac{a}{a+b}$$

$$H_2 := \{ \text{ prebacili smo crnu kuglicu } \} \qquad \mathrm{P}(H_2) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathrm{P}(A_2|H_1) = \frac{a+1}{a+b+1} \qquad \mathrm{P}(A_2|H_1) = \frac{a}{a+b+1}$$

Tada je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_2) =& \mathrm{P}(A_2|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A_2|H_2)\mathrm{P}(H_2) \\ =& \frac{a+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} == \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

- Pokažimo da je tražena vjerojatnost $\frac{a}{a+b}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ matematičkom indukcijom:
  Baza je provjerena na početku.
  Pretpostavimo da nakon prebacivanja sve do n-te kutije iz n-te kutije izvučemo bijelu kuglicu jednaka $\frac{a}{a+b}$. Tada je vjerojatnost da izvučemo crnu kuglicu jednaka $1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$. Računamo:

  $H_1 := \{$ iz n-te kutije smo prebacili bijelu kuglicu u $(n+1)$-vu kutiju $\}$
  $H_2 := \{$ iz n-te kutije smo prebacili crnu kuglicu u $(n+1)$-vu kutiju $\}$.

  Tada je

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{a}{a+b} \qquad \mathrm{P}(H_2) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathrm{P}(A_{n+1}|H_1) = \frac{a+1}{a+b+1} \qquad \mathrm{P}(A_{n+1}|H_1) = \frac{a}{a+b+1}$$

Tada je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_{n+1}) =& \mathrm{P}(A_{n+1}|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A_{n+1}|H_2)\mathrm{P}(H_2) \\ =& \frac{a+1}{a+b+1}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1}\cdot\frac{b}{a+b} == \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

△

Zadatak 4.16 Ljut na dvorskog matematičara, car naredi da se donese n urni, n crnih i n bijelih kuglica. Matematičar mora rasporediti kuglice u urne tako da u svakoj urni bude barem jedna kuglica . Dvorski krvnik na slučajan način odabire urnu i iz nje izvlači kuglicu. Ako izvuče bijelu kuglicu, matematičaru će život biti pošteđen, a ako izvuče crnu kuglicu, neće. Pomozite nesretnom matematičaru rasporediti kuglice tako da s najvećom vjerojatnošću ostane živ.

Rješenje: Definirajmo potpun sustem događaja:

$$H_i := \{ \text{ odabrana je } i\text{-ta urna } \}, \quad \mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{n}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Neka je $A := \{$ izvučena je bijela kuglica $\}$. Promotrimo sljedeći raspored:

- u svaku urnu stavimo po jednu kuglicu,
- u n-tu urnu stavimo još n crnih kuglica.

Tada je za ovaj raspored vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 1\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n} \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Tvrdimo da se radi o optimalnom rasporedu:

- ako bi postojala urna koja ne sadrži bijelu kuglicu, onda je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A|H_i) \leq \left\{ \begin{array}{c} \text{ako } j\text{-ta urna ne sadrži bijelu kuglicu,} \\ \text{onda je } \mathrm{P}(A|H_j) = 0 \end{array} \right\} \leq \\ \leq 0 \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Dakle, u svakoj urni mora biti pa jedna bijela kuglica.

- ako bi postojale barem 2 urne s crnim kuglicama, onda je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A|H_i) \leq \\ &\leq \left\{ \begin{array}{c} \text{ako } j\text{-ta i } k\text{-ta urna sadrže barem jednu crnu kuglicu,} \\ \text{onda je} \mathrm{P}(A|H_j) \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A|H_k) \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \leq \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(n-2)}{n} = \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

  Dakle, sve crne kuglice moraju biti u jednoj urni.

△

Neka je $\{H_i \colon i \in I\}$ potpun sistem događaja i neka je $A \in \mathcal{F}$ događaj. Tada je

$$\mathrm{P}(H_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{j\in I}\mathrm{P}(A|H_j)\mathrm{P}(H_j)}.$$

Pokazali smo **Bayesovu formulu**:

$$\mathrm{P}(H_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{j\in I}\mathrm{P}(A|H_j)\mathrm{P}(H_j)}.$$

Primjer 4.17 Krv se testira na neku rijetku bolest, koja se u prosjeku pojavljuje jednom na 100 000 ljudi. Ako netko stvarno ima tu bolest, test će to pokazati s vjerojatnošću 0.95, a ako netko nema tu bolest, test to neće pokazati s vjerojatnošću 0.005. Pretpostavimo da smo testirali neku osobu i da je test je pokazao da ona ima tu bolest. Pokušajmo odrediti vjerojatnost da je dijagnoza točna.

Definiramo potpun sistem događaja:

$$H_0 := \{ \text{ osoba ima bolest } \},\quad H_1 := \{ \text{ osoba nema bolest } \}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_0) = \frac{1}{100000},\quad \mathrm{P}(H_1) = \frac{99999}{100000}.$$

Definirajmo

$$T := \{ \text{ test pokazuje da osoba ima bolest } \}$$

pa je

$$\mathrm{P}(T|H_0) = 0.95,\quad \mathrm{P}(T|H_1) = 0.005.$$

Vjerojatnost da je dijagnoza točna je

$$\mathrm{P}(H_0|T) = \text{ Bayesova formula } = \frac{\mathrm{P}(T|H_0)\mathrm{P}(H_0)}{\mathrm{P}(T|H_0)\mathrm{P}(H_0)+\mathrm{P}(T|H_1)\mathrm{P}(H_1)} =$$
$$= \frac{0.95\cdot\frac{1}{100000}}{0.95\cdot\frac{1}{100000}+0.005\cdot\frac{99999}{100000}} \approx 0.002.$$

Dakle, ako je test pokazao da osoba ima bolest, onda je vjerojatnost da osoba zaista ima tu bolest jako mala. Drugim riječima, ovaj test je beskoristan za rijetke bolesi.

△

Zadatak 4.18 U nekom gradu na aeordrom vozi 30 % taksija plave boje, 20 % taksija zelene boje i 50 % taksija žute boje. Oni putnike na aerodrom dovedu prekasno na let s vjerojatnostima 0.1, 0.2, 0.3. Jednog dana, žureći na aerodrom, neki putnik je zaustavio taksi na ulici i rekao vozaču da vozi na aerodrom. Na kraju putnik nije zakasnio na avion. Izračunajte vjerojatnost da se putnik vozio u žutom taksiju.

Rješenje: Definiramo potpun sistem događaja:

$$H_1 = \{ \text{ putnik je zaustavio plavi taksi } \},$$
$$H_2 = \{ \text{ putnik je zaustavio zeleni taksi } \},$$
$$H_r = \{ \text{ putnik je zaustavio žuti taksi } \}.$$

$$\mathrm{P}(H_1) = 0.1, \quad \mathrm{P}(H_2) = 0.2, \quad \mathrm{P}(H_3) = 0.5$$

Neka je

$$A = \{ \text{ putnik nije zakasnio na avion } \}$$

pa je

$$\mathrm{P}(A|H_1) = 0.9, \quad \mathrm{P}(A|H_2) = 0.8, \quad \mathrm{P}(A|H_3) = 0.7.$$

Tražena vjerojatnost je

$$\mathrm{P}(H_3|A) = \text{ Bayes } = \frac{\mathrm{P}(A|H_3)\mathrm{P}(H_3)}{\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}$$
$$= \frac{0.7\cdot 0.5}{0.9\cdot 0.3+0.8\cdot 0.2+0.7\cdot 0.5} = \frac{35}{73}.$$

△

Zadatak 4.19 Nekim kanalom se prenose podaci zapisani pomoću 0 i 1. Vjerojatnost da se pošalje 1 je 0.6, a vjerojatnost da se pošalje 0 je 0.4. Na izlazu se 10 % znakova pogrešno interpretira. Ako je primljen znak 1, izračunajte vjerojatnost da je on i poslan.

Rješenje: Potpun sistem događaja je

$$\begin{aligned} H_0 &:= \{ \text{ poslan je znak 0 } \} & \mathrm{P}(H_0) &= 0.4, \\ H_1 &:= \{ \text{ poslan je znak 1 } \} & \mathrm{P}(H_1) &= 0.6. \end{aligned}$$

Ako je

$$A := \{ \text{ primljen je znak 1} \},$$

onda je

$$\mathrm{P}(A|H_0) = 0.1, \quad \mathrm{P}(A|H_1) = 0.9$$

pa traženu vjerojatnost izračunamo koristeći Bayesovu formulu:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(H_1|A) &= \frac{\mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(A|H_0)\mathrm{P}(H_0) + \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1)} = \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.6}{0.1 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.6} = 0.931. \end{aligned}$$

△

Zadatak 4.20 U košari je 10 banana, među kojima je 7 zrelih. Pohlepni majmun je iz košare zgrabio 3 banane i pojeo ih. Vlasnik majmuna je nakon toga iz košare nasumce uzeo još jednu bananu i vidio je da je ona zrela. Kolika je vjerojatnost da je majmun pojeo barem jednu zrelu bananu?

Rješenje: Potpun sistem događaja je

$$H_i := \{ \text{ majmun je pojeo } i \text{ zrelih banana } \}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{\binom{7}{i}}{\binom{3}{3-i}\binom{10}{3}}.$$

Neka je

$$A := \{ \text{ vlasnik je izvukao zrelu bananu } \}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(A|H_i) = \frac{7-i}{7}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Tražimo vjerojatnost

$$\mathrm{P}(\{\text{ majmun pojeo barem jednu zrelu bananu }\}|A) = \mathrm{P}(H_1 \cup H_2 \cup H_3|A) =$$
$$= \mathrm{P}(H_0^c|A) = 1 - \mathrm{P}(H_0|A) = \text{ Bayes } = 1 - \frac{\mathrm{P}(A|H_0)\mathrm{P}(H_0)}{\sum_{i=0}^{3} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)} = \frac{83}{84}.$$

△

Zadatak 4.21 Simetrična kocka A ima 2 zelene i 4 bijele strane, a simetrična kocka B 4 zelene i 2 bijele strane. Bacamo simetrični novčić. Ako padne pismo, bacamo kocku A, a inače bacamo kocku B. Izračunajte da smo bacali kocku A, ako znamo da je kocka pala na zeleno.

Rješenje: Potpun sistem događaja je i

$$H_1 := \{\text{ palo je pismo }\}, \quad H_2 := \{\text{ pala je glava }\}$$

i

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(H_2).$$

Neka je

$$Z = \{\text{ kocka je pala na zeleno }\}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(Z|H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(Z|H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

pa iz Bayesove formule slijedi

$$\mathrm{P}(H_1|Z) = \frac{\mathrm{P}(Z|H_1)\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(Z|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(Z|H_2)\mathrm{P}(H_2)} = \\ = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

△

Zadatak 4.22 U kutiji se nalazi 91 bijelih i crnih kuglica. Iz kutije je izvučeno 19 kuglica: 7 bijelih i 12 crnih. Nađite najvjerojatniji sastav kutije.

Rješenje: Pretpostavimo da su svi sastavi kutije jednako vjerojatni. Definiramo potpun sistem događaja:

$$H_k := \{ \text{ u kutiji je k bijelih kuglica } \},\ k \in \{0, 1, \ldots, 91\}.$$

Tada je $\mathrm{P}(H_k) = \frac{1}{92}$ za sve k. Za

$$A := \{ \text{ izvučeno je 7 bijelih i 12 crnih kuglica } \}$$

je

$$\mathrm{P}(A|H_k) = \frac{\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}}{\binom{91}{19}},\ \text{ za } k \in \{7, 8, \ldots, 78, 79\},$$

i

$$\mathrm{P}(A|H_k) = 0,\ \text{ za } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\} \cup \{80, 81, \ldots, 91\}.$$

Najvjerojatniji sastav kutije ćemo odrediti maksimiziranjem funkcije

$$k \mapsto \mathrm{P}(H_k|A),\quad k \in \{0, 1, \ldots, 91\}.$$

Iz Bayesove formule slijedi

$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_k)\mathrm{P}(H_k)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{1}{92\binom{91}{19}\mathrm{P}(A)}\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}$$

odakle vidimo da trebamo načni najveći član niza $(a_k)_{7\le k\le 79}$, gdje je

$$a_k := \binom{k}{7}\binom{91-k}{12}.$$

Za $k \in \{7, 8, \ldots, 78\}$ računamo

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\binom{k+1}{7}\binom{90-k}{12}}{\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}} = \frac{(k+1)(79-k)}{(k-6)(91-k)}$$

pa je

$$a_{k+1} \leq a_k \iff \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1 \iff \frac{(k+1)(79-k)}{(k-6)(91-k)} \iff 19k \geq 625 \iff k \geq 32.89.$$

Dakle,

$$a_7 \leq a_8 \leq a_9 \leq \ldots \leq a_{33} \geq a_{34} \geq \ldots \geq a_{79}$$

pa je a_{33} najveći član, odakle zaključujemo da su u kutiji najvjerojatnije 33 bijele kuglice.

△

Zadatak 4.23 U kutiji je 5 kuglica(različitih!) od kojih svaka može biti bijela ili crna s jednakom vjerojatnošću. Ako smo izvukli bijelu kuglicu, koji je najvjerojatniji broj crnih kuglica u kutiji?

Rješenje: Potpun sistem događaja:

$$H_i := \{ \text{ u kutiji je } i \text{ crnih kuglica } \}, \quad i \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{\binom{5}{i}}{2^5}$$

Za

$$A := \{ \text{ izvučena je bijela kuglica } \}$$

je

$$\mathrm{P}(A|H_i) = \frac{5-i}{5}$$

Ideja je maksimizirati funkciju

$$i \mapsto \mathrm{P}(H_i|A), \quad i \in \{0,1,2,3,4,5\},$$

a iz

$$\mathrm{P}(H_i|A) = \text{ Bayes } = \frac{1}{\mathrm{P}(A)}(5-i) \cdot \binom{5}{i}$$

vidimo da treba promatrati samo izraz oblika $(5-i) \cdot \binom{5}{i}$:

i	0	1	2	3	4	5
$(5-i) \cdot \binom{5}{i}$	5	20	30	20	5	0

Dakle, u kutiji su najvjerojatnije 2 crne kuglice.

△

Formulu potpune vjerojantosti možemo malo i poopćiti.

Neka je $\{H_i \colon i \in I\}$ potpun sistem događaja i $A, B \in \mathcal{F}$, takvi da je $\mathrm{P}(B) > 0$. Primjenimo li formulu potpune vjerojatnosti na vjerojatnosnu mjeru definiranu sa $\mathrm{P}_B(\cdot) = \mathrm{P}(\cdot|B)$ (vidite Zadatak 4.28), onda vidimo da vrijedi

$$\mathrm{P}_B(A) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}_B(A|H_i)\mathrm{P}_B(H_i) = (*)$$

$$\mathrm{P}_B(A|H_i) = \frac{\mathrm{P}_B(A \cap H_i)}{\mathrm{P}_B(H_i)} = \frac{\frac{\mathrm{P}(A\cap H_i\cap B)}{\mathrm{P}(B)}}{\frac{\mathrm{P}(B\cap H_i)}{\mathrm{P}(B)}} = \mathrm{P}(A|B \cap H_i)$$

$$\Longrightarrow\ (*) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A|B \cap H_i)\mathrm{P}(H_i|B).$$

Dakle, vrijedi proširena formula potpune vjerojantosti:

$$\mathrm{P}(A|B) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A|B \cap H_i)\mathrm{P}(H_i|B).$$

Zadatak 4.24 Kutija sadrži n kuglica. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica u kutiji su jednako vjerojatne. Ako je bez vraćanja izvučena kuglica bijele boje, kolika je vjerojatnost da će i sljedeća izvučena kuglica biti bijele boje?

Rješenje: Potpun sistem događaja je

$$H_i := \{\text{ u kutiji je } i \text{ bijelih kuglica }\},\quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

i

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{n+1}.$$

Neka su

$$A :=\{\text{ prvi put je izvučena bijela kuglica }\},$$
$$B :=\{\text{ drugi put je izvučena bijela kuglica }\}.$$

Tražena vjerojatnost je

$$\mathrm{P}(A|B) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(A|B \cap H_i)\mathrm{P}(H_i|B) = (*)$$

Računamo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A|B\cap H_0) &= 0 \\ \mathrm{P}(A|B\cap H_i) &= \frac{i-1}{n-1}, \quad i\in\{1,2,\ldots,n\}, \\ \mathrm{P}(B|H_i) &= \frac{i}{n}, \quad i\in\{0,1,\ldots,n\} \end{aligned}$$

i iz Bayesove formule dobijemo

$$\mathrm{P}(H_i|B) = \frac{\mathrm{P}(B|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{j=0}^{n}\mathrm{P}(B|H_j)\mathrm{P}(H_j)} = \frac{\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ (*) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n-1}\cdot\frac{2i}{n(n+1)} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}i\right) = \\ &= \frac{2}{(n-1)n(n+1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

△

Zadatak 4.25 Na ispitu je 10 pitanja. Student prolazi ako točno odgovori na dva proizvoljno odabrana pitanja ili ako točno odgovori na jedno od njih i zatim odgovori točno i na treće postavljeno pitanje. Na koliko pitanja student treba znati odgovor da bi s vjerojatnošću 0.8 položio ispit?

Rješenje: Pretpostavimo da student zna odgovor na n pitanja. Definiramo potpun sistem događaja

$$\begin{aligned} H_0 &:= \{\text{ od prva dva pitanja, student nije odgovorio ni na jedno }\}, \\ H_1 &:= \{\text{ od prva dva pitanja, student je odgovorio na jedno pitanje }\}, \\ H_2 &:= \{\text{ od prva dva pitanja, student je odgovorio na oba }\}. \end{aligned}$$

Tražimo vjerojatnost događaja

$$A := \{\text{ student je položio ispit }\}.$$

$$\mathrm{P}(H_0) = \frac{(10-n)(9-n)}{10\cdot 9} \qquad \mathrm{P}(A|H_0) = 0$$
$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{\binom{2}{1} n(10-n)}{10\cdot 9} \qquad \mathrm{P}(A|H_1) = \frac{n-1}{8}$$
$$\mathrm{P}(H_2) = \frac{n(n-1)}{10\cdot 9} \qquad \mathrm{P}(A|H_2) = 1$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}(A)\sum = i = 0^2 \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \ldots = \frac{n(n-1)(14-n)}{360} =: f(n).$$

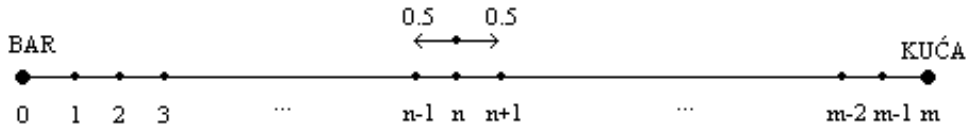
Tada je

n	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	0.5	0.67	0.82	0.93	1	1

Dakle, student treba znati odgovor na barem 7 pitanja.

△

Zadatak 4.26 Pijanac šeta ulicom duljine m blokova i trenutno se nalazi n blokova od bara ($1 \leq n \leq m-1$). On s jednakom vjerojatnošću ide lijevo ili desno sve dok ne dođe do bara ili kuće.



Izračunajte vjerojatnost da pijanac dođe kući prije nego što završi u baru.

Rješenje: Neka je

$$A := \{ \text{ pijanac je stigao kući prije nego u bar } \}$$

i

$$B_n := \{ \text{ pijanac se nalazi n blokova od bara } \}, \quad 0 \leq n \leq m.$$

Neka je

$$H_1 := \{ \text{ pijanac ide lijevo } \} \quad H_2 := \{ \text{ pijanac ide desno } \}$$

potpun sistem događaja i neka je$p_n := \mathrm{P}(A|B_n)$. Iz proširene formule potpune vjerojatnosti za $1 \leq n \leq m-1$ slijedi

$$\begin{aligned} p_n &= \mathrm{P}(A|B_n \cap H_1)\mathrm{P}(H_1|B_n) + \mathrm{P}(A|B_n \cap H_2)\mathrm{P}(H_2|B_n) \\ &= \mathrm{P}(A|H_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} + \mathrm{P}(A|H_{n+1}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Na rubovima je $p_0 = \mathrm{P}(A|B_0) = 0$, $p_m = \mathrm{P}(A|B_m) = 1$ pa smo dobili (homogenu) rekurziju s rubnim uvjetima: $\begin{cases} 2p_n &= p_{n+1} + p_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq m-1 \\ p_0 &= 0 \\ p_m &= 1 \end{cases}$ Karakteristična jednadžba je $r^2 - 2r + 1 = 0$, odakle vidimo da je rješenje oblika $p_n = An + B$. Iz rubnih uvjeta dobijemo $A = \frac{1}{m}$ i $B = 0$ pa je $p_n = \frac{n}{m}$, za $0 \leq n \leq m$.

△

Zadatak 4.27 Simetrična kocka se baca n puta. Izračunajte vjerojatnost da šestica padne neparan broj puta.

Rješenje: Označimo s p_n vjerojatnost da šestica padne neparan broj puta u n bacanja. Definirajmo događaj $A :=$ { šestica je pala neparan broj puta } i potpun sistem događaja:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{ \text{ u prvom bacanju je pala šestica } \}, \\ H_2 &:= \{ \text{ u prvom bacanju nije pala šestica } \} \\ &\quad . \end{aligned}$$

Tada je iz formule potpune vjerojatnosti:

$$p_n = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\mathrm{P}(H_2) = (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{6} + p_{n-1} \cdot \frac{1}{6},$$

odakle dobijemo rekurziju

$$6p_n - 4p_{n-1} - 1 = 0.$$

Pripadna homogena rekurzija je

$$6p_n - 4p_{n-1} = 0$$

pa je karakteristična jednadžba

$$6r - 4 = 0,$$

odakle je $r = \frac{2}{3}$ pa je rješenje homogene rekurzije

$$p_n^h = A\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Rjesenje početne(nehomogene) rekurzije je tada

$$p_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B,$$

gdje su A i B neke konstante koje odredimo iz početnih uvjeta:

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{\binom{2}{1} \cdot 5 \cdot 1}{6^2} = \frac{5}{18}.$$

Dakle, iz

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= p_1 = A \cdot \frac{2}{3} + B \\ \frac{5}{3} &= p_2 = A \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + B \end{aligned}$$

dobijemo

$$p_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2}.$$

△

Zadaci za vježbu

4.28 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathrm{P}(B) > 0$. Pokažite da je funkcija $\mathrm{P}_B \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\mathrm{P}_B(A) := \mathrm{P}(A|B), \quad A \in \mathcal{F}$$

vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

4.29 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathrm{P}(B) > 0$. Pokažite da je

$$\mathrm{P}(A|B) \geq \frac{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1}{\mathrm{P}(B)}.$$

4.30 U kutiji je n kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, n$. Iz kutije na slučajan način izvučemo jednu kuglicu. Ako je kuglica bila označena brojem 1, ne vraćamo je u kutiju, a inače je vraćamo. Nakon toga izvučemo još jednu kuglicu. Izračunajte vjerojatnost da je druga kuglica označena brojem 2?

4.31 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Jesu li događaji $A \Delta B$ i C nezavisni?

4.32 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Pokažite da je

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c) \iff A \text{ i } B \text{ su nezavisni.}$$

4.33 U kutiji se nalazi 4 plave, 5 bijelih i 6 crnih kuglica. Izvlačimo tri kuglice, jednu po jednu bez vraćanja. Promotrimo sljedeće događaje:

$$A = \{\text{sve tri kuglice su različitih boja}\}, \ B = \{\text{prva kuglica je bijela}\}$$

$$C = \{\text{prve dvije kuglice su različitih boja.}\}$$

Izračunajte $P(A), \ P(A|B), \ P(A|C)$. Jesu li događaji A i B nezavisni?

4.34 Neka je $E \in \mathcal{F}$ događaj koji je nezavisan sa samim sobom. Koje vrijednosti može poprimiti $\mathrm{P}(E)$?

4.35 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ događaji takvi da je

$$\mathrm{P}(A \Delta B) = 0, \ \mathrm{P}(A \cup B) = p \ \text{ za neki } p \in [0, 1].$$

(a) Izračunajte $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{P}(A \setminus B)$ i $\mathrm{P}(B \setminus A)$.

(b) Jesu li događaji A i B nezavisni?

4.36 Tvornica čokolade organizira nagradnu igru u kojo treba sakupiti određeni broj kupona koji se nalaze u čokoladama. U tvornici u svaku od velikih kutija koje sadrže po 200 čokolada stavljaju 50 čokolada s nagradnim kuponom. Mali Ivica želi dobiti nagradu pa je nagovorio oca da mu kupi čitavu veliku kutiju s 200 čokolada i počeo otvarati čokolade jednu za drugom. Izračunajte vjerojatnost da će mali Ivica u 128. pregledanoj čokoladi pronaći nagradni kupon.

4.37 Na stolu su 3 kutije:

- u prvoj kutiji su 2 žute, 4 zelene i 6 plavih kuglica;
- u drugoj kutiji su 4 žute, 6 zelenih i 8 plavih kuglica;
- u prvoj kutiji su 6 žutih, 8 zelenih i 10 plavih kuglica.

Bacamo simetričnu kocku i ako padne 1,2 ili 3 biramo prvu kutiju, ako padne 4 biramo drugu kutiju, a inače biramo treću kutiju.

(a) Iz tako odabrane kutije je izvučena kuglica i ona je bila zelene boje. Ako kuglice ne vraćamo u kutiju, izračunajte vjerojatnost da će sljedeća izvučena kuglica biti plava.

(b) Ako su izvučene dvije žute kuglice, odredite kutiju iz koje su one najvjerojatnije izvučene.

4.38 U ponoć su na parkiralištu bila 2 siva i 1 crni Ford, 3 siva i 4 crna BMW-a i 3 sive i 1 crna Toyota. Te noći je kradljivac automobila nasumce odabrao automobil i ukrao ga. Ako je ukraden automobil sive boje, koja je vjerojatnost da je to bio BMW?

4.39 Marko je ozbiljan student koji uči petkom navečer. Međutim, njegov cimer ide van petkom navečer; 40 % puta ode van s djevojkom, a 60 % puta ode do obližnjeg bara. Ako ode van s djevojkom, onda kod nje prespava 30 % puta, a ako otiđe u bar, onda u 40 % puta izazove tuču i noć provede u zatvoru. Jedne subote Marko se probudio i vidio da mu cimer nije u sobi. Izračunajte vjerojatnost da je Markov cimer u zatvoru.

4.40 Tri prijateljice, Dunja, Lidija i Tina, prijavile su se kao ekipa na kviz znanja. One se za odgovor na pitanje prijavljuju s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. Na pitanje odgovaraju točno s vjerojatnostima $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{5}$. Ako pitanje nije točno odgovoreno, nađite vjerojatnost da je na pitanje odgovarala Tina.

4.41 Nekim kanalom se prenose podaci zapisani pomoću znakova 0 i 1. Vjerojatnost da se pošalje 1 je 0.3, a vjerojatnost da se pošalje 0 je 0.7. Na izlazu se 15% znakova pogrešno interpretira. Ako je primljen znak 1, izračunajte vjerojatnost da je poslan znak 0.

4.42 Na stolu su dvije kutije. U prvoj kutiji su plava, zelena i crvena kuglica, a u drugoj kutiji je p plavih, z zelenih i c crvenih kuglica ($p, z, c \geq 1$). Slučajno odaberemo dvije kuglice iz prve kutije i prebacimo ih u drugu kutiju. Nakon toga iz druge kutije izvučemo kuglicu. Ako je izvučena kuglica zelene boje, izračunajte vjerojatnost da u prvoj kutiji nema crvene kuglice.

4.43 Simetrična kocka A ima 4 crvene i 2 bijele strane, dok simetrična kocka B ima 2 crvene i 4 bijele strane. Bacamo simetrični novčić. Ako padne pismo, onda se igra kockom A, a inače se igra kockom B. Na kocki je dva puta zaredom palo crveno. Izračunajte vjerojatnost da će i treći put pasti crveno.

4.44 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathrm{P}(A) = 0.9$ i $\mathrm{P}(B) = 0.8$. Pokažite da je $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0.7$.

(b) Pokažite da za $C, D \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathrm{P}(C|C \cup D) \geq \mathrm{P}(C|D).$$

Rješenja: **4.30.** $\frac{n^2-n+1}{n^3-n^2}$ **4.34.** 0 ili 1 **4.36.** 0.25 **4.37 (a) 0.496 (b) iz treće kutije. 4.38. 0.375 4.39. 0.6666 4.40. 0.2222 4.41. 0.291 4.42.** $\frac{2z+1}{3z+2}$ **4.43. 0.6**